

UEBER

DIE BESTIMMUNG DES DÄMPFungsverhältnisses

STARK GEDÄMPFTER HORIZONTALPENDEL.

Von

Fürst B. Galitzin (Golicyn).

N 270

St. PETERSBURG.

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

(Wass. Ostr., 9 Lin., № 12).

1910.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Mai 1910. S. v. Oldenburg, Beständiger Secretär.

Ueber die Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses stark gedämpfter Horizontalpendel.

VON FÜRST B. GALITZIN.

Es ist zur Zeit eine hinreichend bewiesene, wenn auch noch nicht von allen Seismologen genügend anerkannte Tatsache, dass es zum Zweck der Erforschung des wahren Charakters der Bodenverschiebungen beim Eintreffen von Erdbebenwellen im hohen Maasse wünschenswert ist, die dazu dienenden Seismographen mit einer starken Dämpfung zu versehen, um den störenden Einfluss der Eigenbewegung der Apparate möglichst herabzudrücken. Je stärker die Dämpfung ist, desto weniger macht sich dieser störende Einfluss geltend; es muss aber bei Anwendung einer sehr starken Dämpfung für eine genügende Empfindlichkeit der Registrierung des entsprechenden Seismographen gesorgt werden, worauf ich hier nicht näher einzugehen brauche.

Zum Zweck der Auswertung der erhaltenen Seismogramme mit Rücksicht auf die Ableitung der wahren Elemente der Bodenbewegung muss man nicht nur die Eigenperiode des Instrumentes, sondern auch das entsprechende Dämpfungsverhältnis, d. h. das Verhältnis zweier nach einander folgender Ausschläge (unabhängig vom Vorzeichen derselben), etwa y_k und y_{k+1} , möglichst genau kennen.

Dieses Dämpfungsverhältnis wollen wir mit v bezeichnen; es ist also

$$v = \frac{y_k}{y_{k+1}} \dots \dots \dots (1)$$

Lässt man das Horizontalpendel, entweder optisch oder mechanisch die Kurve seiner Eigenbewegung aufschreiben und ist dabei die Dämpfung nicht besonders stark, sodass eine Anzahl Umkehrpunkte vorliegt, wo y Maximum oder Minimum wird, so lässt sich das gesuchte Dämpfungsverhältnis v

nach der Formel (1) in sehr einfacher Weise ableiten. Allein bei der mechanischen Registrierung muss eine Korrektur ρ in bezug auf die Reibung der Schreibfeder auf dem berussten Papier und eine andere Korrektur für die Kreisbewegung des Schreibstiftes mitberücksichtigt werden. Auf diese Frage werde ich jedoch hier nicht weiter eingehen, da ich dieselbe in einer anderen Abhandlung schon besprochen habe¹⁾.

Treibt man aber die Dämpfung in die Höhe, so dass die Umkehrpunkte sich nicht mehr deutlich erkennen lassen, was speziell zutrifft, wenn man sich der Aperiodizitätsgrenze nähert, so kann man von dieser Methode keinen weiteren Gebrauch machen.

Wendet man dagegen bei sehr stark gedämpften Horizontalpendeln die galvanometrische Registriermethode an, so lässt sich, wenn die Eigenperiode des Galvanometers sich wenig von der Eigenperiode des Pendels unterscheidet, das gesuchte Dämpfungsverhältnis v in ausserordentlich einfacher und genauer Weise ableiten. Diese Methode ist ausführlich in meiner Abhandlung «Ueber die Bestimmung der Konstanten von stark gedämpften Horizontalpendeln²⁾» beschrieben. Diese Methode, von der ich bei meinen Seismographen in Pulkowa jetzt immer Gebrauch mache, ist in der Praxis äusserst bequem, um desto mehr, da sie gar nicht die Aufnahme der Kurve der Eigenbewegung des Apparates erfordert.

In meiner anderen Abhandlung «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa. Zweite Mitteilung³⁾» habe ich zwei andere Methoden zur Bestimmung von v angegeben, die jedoch ziemlich umständlich sind.

In dieser Abhandlung möchte ich zwei neue Methoden beschreiben; die erste derselben ist gewissermassen eine Vereinfachung einer der früher angegebenen.

Diese neuen Methoden können speziell bei stark gedämpften Pendeln gute Dienste leisten.

Ich setze im Folgenden voraus, dass die Registrierung der Pendelbewegung eine rein optische ist. Wird aber die Bewegung des Pendels mechanisch registriert, so bedürfen die gemessenen Kurvenordinaten gewisser schon erwähnter Korrekturen.

Ich werde zuerst die Theorie dieser Methoden auseinandersetzen und alsdann schon die Resultate einiger ihrer Anwendungen mitteilen.

¹⁾ Siehe meinen Aufsatz «Ueber ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 3 St.-Petersbourg.

²⁾ Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg. № 9. (1908).

³⁾ Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, T. III, Livr. 2. № 1 (1909).

Es bedeute y die lineare Ablenkung des Lichtpunktes auf der Registriertrommel von seiner Ruhelage. Dann lautet bekanntlich die Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels bei ruhender Unterlage, wie folgt:

$$y'' + 2\epsilon y' + n^2 y = 0 \dots\dots\dots (2)$$

Hierin bedeuten:

ϵ — die Dämpfungskonstante

und

n — eine Konstante, welche von der Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung T unmittelbar abhängt und zwar ist

$$n = \frac{2\pi}{T} \dots\dots\dots (3)$$

Die Konstante n lässt sich aus Schwingungsbeobachtungen bei schwacher Dämpfung in sehr leichter Weise ermitteln.

Ist z. B. T' die in diesem Falle beobachtete Periode und Λ das entsprechende Brigg'sche logarithmische Dekrement, also

$$\Lambda = \text{Log}_{10} v,$$

so ergibt sich bekanntlich aus der Theorie des Horizontalpendels¹⁾

$$n = \frac{2\pi}{T'} \sqrt{1 + 0,53720\Lambda^2} \dots\dots\dots (4)$$

n kann also als eine bekannte Grösse angesehen werden.

Es handelt sich hier nun darum, die Konstante ϵ zu bestimmen, wenn die Dämpfung sehr stark ist. Wir wollen dabei voraussetzen, dass immer

$$\epsilon < n$$

bleibt, dass also die Aperiodizitätsgrenze nicht überschritten wird.

Das allgemeine Integral der Gleichung (2) lautet

$$y = e^{-\epsilon t} [A \cos \gamma t + B \sin \gamma t], \dots\dots\dots (5)$$

wo γ folgende Bedeutung hat

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \epsilon^2} \dots\dots\dots (6)$$

¹⁾ Siehe z. B. «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa. Zweite Mitteilung». L. c. § 2.
1*

A und B sind Integrationskonstanten, welche von den Anfangsbedingungen der Bewegung unmittelbar abhängen.

Wollen wir nun folgende Bezeichnungen einführen:

und
$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{\varepsilon}{\gamma} \\ \mu^2 &= 1 - h^2 \\ m &= \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

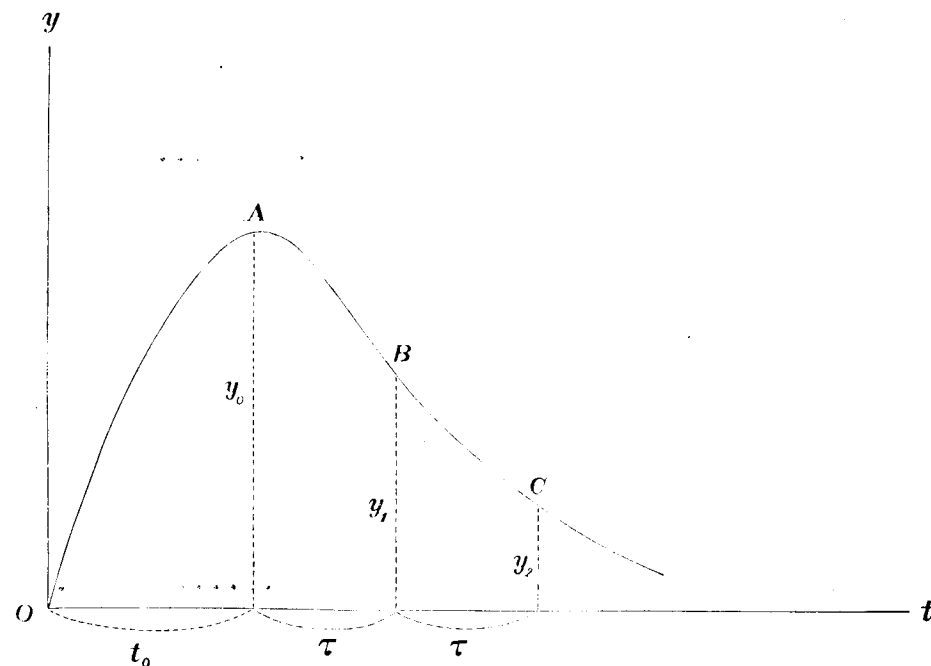
so wird bekanntlich das gesuchte Dämpfungsverhältnis v durch folgende Formel gegeben:

$$v = e^{\pi m} \dots\dots\dots (8)$$

Setzen wir voraus, dass dem Pendel ein anfänglicher Anstoss erteilt wird, und lassen wir dasselbe die Kurve seiner Eigenbewegung beschreiben.

Wenn die Dämpfung genügend stark ist, so hat diese Kurve in ihrem anfänglichen Teil folgende Gestalt (siehe die Fig. 1).

Fig. 1.



Aus der erhaltenen Kurve der Eigenbewegung des Pendels soll nun das Dämpfungsverhältnis v , welches als sehr gross vorausgesetzt wird, abgeleitet werden. Dazu kann man sich der zwei folgenden Methoden bedienen.

Erste Methode.

Es mögen die maximale Ordinate y_0 im Umkehrpunkte A und noch zwei andere Ordinaten y_1 und y_2 in gleichen Abszissenentfernungen τ gemessen werden. τ soll in Sekunden ausgedrückt werden; es muss folglich irgend welche Zeitmarkierung angebracht werden, etwa eine Hilfslinie mit Sekundenunterbrechungen. Die Trommelgeschwindigkeit muss selbstverständlich bei diesem Versuch eine genügend grosse sein.

Wollen wir nun für den Anfang der Zeitzählung denjenigen Moment annehmen, welcher dem Punkte A entspricht.

Dann wird für $t = 0$

$$y = y_0, \quad y' = 0.$$

Aus der Formel (5) folgt alsdann

$$y = y_0 e^{-\varepsilon t} \left[\cos \gamma t + \frac{\varepsilon}{\gamma} \sin \gamma t \right] \dots\dots\dots (9)$$

Dementsprechend haben wir

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 e^{-\varepsilon \tau} \left[\cos \gamma \tau + \frac{\varepsilon}{\gamma} \sin \gamma \tau \right] \\ y_2 &= y_0 e^{-2\varepsilon \tau} \left[\cos 2\gamma \tau + \frac{\varepsilon}{\gamma} \sin 2\gamma \tau \right] \end{aligned}$$

Bilden wir nun die Differenzen

und
$$\left. \begin{aligned} m_1 &= y_0 - y_1 \\ m_2 &= y_0 - y_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

Diese Differenzen lassen sich sehr genau ermitteln. Eine etwaige unrichtige Lage der Nulllinie (Verschiebung derselben nach oben oder unten) hat also keine Bedeutung mehr, da es bei dieser Methode der Bestimmung von v nicht auf die Werte der absoluten Ordinaten, sondern auf die *Differenzen* derselben ankommt.

Man findet für m_1 und m_2 sofort folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= y_0 \left[1 - e^{-\varepsilon \tau} \left\{ \cos \gamma \tau + \frac{\varepsilon}{\gamma} \sin \gamma \tau \right\} \right] \\ m_2 &= y_0 \left[1 - e^{-2\varepsilon \tau} \left\{ \cos 2\gamma \tau + \frac{\varepsilon}{\gamma} \sin 2\gamma \tau \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen y_0 , so ergibt sich

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - e^{-\epsilon\tau} \left\{ \cos \gamma\tau + \frac{\epsilon}{\gamma} \sin \gamma\tau \right\}}{1 - e^{-2\epsilon\tau} \left\{ \cos 2\gamma\tau + \frac{\epsilon}{\gamma} \sin 2\gamma\tau \right\}} \dots\dots\dots (12)$$

Das ist die Grundformel zur Bestimmung des gesuchten Dämpfungsverhältnisses v .

$\frac{m_1}{m_2}$ ist, wenn τ nicht sehr gross gewählt wird, immer ein echter Bruch, welcher aus den Beobachtungen zu entnehmen ist.

Wollen wir jetzt an der Formel (12) einige Umformungen vornehmen. Setzen wir

$$h = \frac{\epsilon}{n} = \cos \psi, \dots\dots\dots (13)$$

wo

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

wird.

Dann wird, mit Rücksicht auf die Beziehungen (7) und (8),

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sin \psi, \\ m &= \cotg \psi \\ v &= e^{\pi \cotg \psi}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

und

Weiter ist

$$\gamma = + \sqrt{n^2 - \epsilon^2} = n \sqrt{1 - h^2} = n \sin \psi$$

und

$$\gamma\tau = n\tau \cdot \sin \psi = \alpha \sin \psi, \dots\dots\dots (15)$$

wo

$$\alpha = n\tau \dots\dots\dots (16)$$

gesetzt wird.

α ist eine reine Zahl.

Weiter ist

$$\frac{\epsilon}{\gamma} = \frac{n \cos \psi}{n \sin \psi} = \cotg \psi \dots\dots\dots (17)$$

und

$$\epsilon\tau = \alpha \cos \psi.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{-\epsilon\tau} \left\{ \cos \gamma\tau + \frac{\epsilon}{\gamma} \sin \gamma\tau \right\} &= \frac{1}{\sin \psi} \cdot e^{-\alpha \cos \psi} \cdot \sin \{ \alpha \sin \psi + \psi \} \\ e^{-2\epsilon\tau} \left\{ \cos 2\gamma\tau + \frac{\epsilon}{\gamma} \sin 2\gamma\tau \right\} &= \frac{1}{\sin \psi} e^{-2\alpha \cos \psi} \sin \{ 2\alpha \sin \psi + \psi \}, \end{aligned}$$

und

also

$$\frac{m_1}{m_2} = F(\alpha, \psi), \dots\dots\dots (18)$$

wo

$$F(\alpha, \psi) = \frac{\sin \psi - e^{-\alpha \cos \psi} \cdot \sin \{ \alpha \sin \psi + \psi \}}{\sin \psi - e^{-2\alpha \cos \psi} \sin \{ 2\alpha \sin \psi + \psi \}} \dots\dots\dots (19)$$

gesetzt wird.

$\frac{m_1}{m_2}$ ist aus der Kurve bekannt. α ist eine Grösse, welche nach Belieben gewählt werden kann, da dieselbe von der Entfernung τ der aequidistanten Ordinaten unmittelbar abhängig ist (siehe Formel (16)) und n aus der bekannten Eigenperiode des Pendels gegeben wird (siehe die Formel (4)).

Wir können also τ immer so wählen, dass α einen vorgeschriebenen Wert erhält.

Da $\frac{m_1}{m_2}$ und α gegeben sind so handelt es sich also nur darum, die Wurzel ψ der Gleichung (18) zu bestimmen; dabei muss

$$0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

bleiben.

Ist nun ψ einmal bekannt, so gibt die dritte der Gleichungen (14) sofort das gesuchte Dämpfungsverhältnis v .

Zur Erleichterung dieser Bestimmungen habe ich die Werte der Funktion $F(\alpha, \psi)$ in ihrer Abhängigkeit von ψ , bei einigen ausgewählten α berechnet.

Diese Werte sind in der am Schluss dieser Abhandlung angeführten Tabelle II gegeben.

Als Argument für diese Tabelle habe ich nicht ψ , sondern $\mu^2 = \sin^2 \psi$ genommen, da eben diese Grösse für stark gedämpfte Pendel besonders maassgebend ist¹⁾.

Die Werte der Funktion $F(\alpha, \psi)$ sind bis auf die Einheit der dritten Dezimale genau gegeben. Dies ist aber etwa die Genauigkeit, mit welcher das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ sich ermitteln lässt.

Hat man nun aus dieser Tabelle denjenigen Wert von μ^2 entnommen, für welchen bei einem gegebenen α $F(\alpha, \psi) = \frac{m_1}{m_2}$ wird, so lässt sich nach den früher angegebenen Formeln das gesuchte Dämpfungsverhältnis v sofort berechnen.

Um diese Rechnung jedoch zu vermeiden, habe ich eine Tabelle der

¹⁾ Man siehe meine Abhandlungen «Ueber die Bestimmung der Konstanten von stark gedämpften Horizontalpendeln» und «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa. Zweite Mitteilung». § 2. L. c.

zugehörigen Werte von μ^2 , h und v zusammengestellt. (Siehe die Tabelle I am Schluss dieser Abhandlung).

$\mu^2 = 1$ entspricht einem völlig ungedämpften und $\mu^2 = 0$ einem aperiodischen Pendel.

Wollen wir jetzt zwei Spezialfälle betrachten.

Erster Fall. Das Pendel soll ungedämpft oder äusserst schwach gedämpft sein.

Dann wird

$$\mu^2 = 1$$

und

$$\psi = \frac{\pi}{2}.$$

In diesem Fall nimmt die Funktion $F(\alpha, \psi)$ folgende Form an

$$F(\alpha, \psi) = \frac{1 - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \dots \dots (20)$$

Zweiter Fall. Das Pendel ist fast aperiodisch, also μ^2 sehr klein und ψ etwa = 0.

In diesem Fall lässt sich der genaue Wert der Funktion $F(\alpha, \psi)$ schwer bestimmen, da der Ausdruck (19) etwa die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Genau für die Grenze der Aperiodizität wird $\psi = 0$ und es wird

$$F(\alpha, \psi) = \frac{\left[\frac{d}{d\psi} \left\{ \sin \psi - e^{-\alpha \cos \psi} \sin(\alpha \sin \psi + \psi) \right\} \right]_{\psi=0}}{\left[\frac{d}{d\psi} \left\{ \sin \psi - e^{-2\alpha \cos \psi} \sin(2\alpha \sin \psi + \psi) \right\} \right]_{\psi=0}},$$

also

$$F(\alpha, \psi) = \frac{1 - e^{-\alpha}(1 + \alpha)}{1 - e^{-2\alpha}(1 + 2\alpha)} \dots \dots \dots (21)$$

Dieser Umstand, dass an der Grenze der Aperiodizität die Funktion $F(\alpha, \psi)$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, ist von keiner wesentlichen Bedeutung, da in der Praxis sich die Formel (19) immer noch für ungemein starke Dämpfungsverhältnisse anwenden lässt.

In der Tat z. B. wird für $v = 1030$ $\mu^2 = 0,17$, folglich $\psi = 24^\circ,4$ sein. (Siehe die Tabelle I).

Selbst für $v = 21800$, wird $\mu^2 = 0,09$ und $\psi = 17^\circ,5$ betragen.

Bei solchen Werten von ψ lassen sich die Berechnungen nach der Formel (19) noch sehr gut durchführen, ein Pendel aber, welches ein solches

Dämpfungsverhältnis besitzt, kann selbstverständlich in der Praxis als ein aperiodisches betrachtet werden.

Wollen wir nun jetzt sehen, welche Werte von α bei der Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses v nach dieser Methode vorkommen können.

α kann immer beliebig klein genommen werden, aber es kann nicht eine bestimmte Grenze überschreiten, wenn y' sein Vorzeichen nicht ändern soll.

Wollen wir nun die entsprechenden maximalen, noch zulässigen Werte von α , nämlich α_m , aufsuchen. Bedeute t_1 die Zeit bis zum nächsten Umkehrpunkt der Kurve, so wird der maximale Wert von $\tau = \frac{t_1}{2}$ sein.

Halten wir nun an der Bedingung $n > \varepsilon$ fest, so wird nach Gleichung (9) y' zum ersten Mal gleich 0 für

$$\sin \gamma t_1 = 0, \dots \dots \dots (22)$$

oder

$$t_1 = \frac{\pi}{\gamma} \dots \dots \dots (23)$$

Da $\tau = \frac{t_1}{2}$ ist, so ergibt sich, mit Bezug auf die Gleichung (15),

$$\alpha_m \sin \psi = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\alpha_m = \frac{\pi}{2 \sin \psi} \dots \dots \dots (24)$$

α_m hängt von ψ , also von dem Wert des Dämpfungsverhältnisses v unmittelbar ab.

In der folgenden kleinen Tabelle sind einige zugehörige Werte von μ^2 , ψ , h , v und α_m zusammengestellt und zwar nach wachsendem v geordnet.

| μ^2 | ψ | h | v | α_m |
|---------|----------|-------|----------|------------|
| 1,00 | 90° 0',0 | 0,000 | 1,00 | 1,57 |
| 0,90 | 71 33,9 | 0,316 | 2,85 | 1,66 |
| 0,80 | 63 26,1 | 0,447 | 4,81 | 1,76 |
| 0,70 | 56 47,4 | 0,548 | 7,82 | 1,88 |
| 0,60 | 50 46,1 | 0,632 | 13,0 | 2,03 |
| 0,50 | 45 0,0 | 0,707 | 23,1 | 2,22 |
| 0,40 | 39 13,8 | 0,775 | 46,9 | 2,48 |
| 0,30 | 33 12,6 | 0,837 | 121 | 2,87 |
| 0,20 | 26 33,8 | 0,894 | 536 | 3,51 |
| 0,10 | 18 26,2 | 0,949 | 12400 | 4,97 |
| 0,00 | 0 0,0 | 1,000 | ∞ | ∞ |

Mit stetig wachsendem v wächst α_m ins Unendliche, aber man wird in der Praxis nie zu grosse Werte von α zu nehmen brauchen.

Die Berechnung der Tabelle II habe ich nur bis zu dem Werte $\alpha=3,00$ durchgeführt, was für die Praxis wohl vollständig ausreichend ist. Für den kleinsten Wert von α habe ich $\alpha=0,25$ genommen und die Rechnungen nur für 12 bestimmte Werte von α durchgeführt, nämlich:

$\alpha=0,25, 0,50, 0,75, 1,00, 1,25, 1,50, 1,75, 2,00, 2,25, 2,50, 2,75, \text{u. } 3,00.$

Eine weitere Detaillierung der Tabelle II in bezug auf α ist ganz und gar überflüssig, da man durch passende Auswahl von τ , bei dem bekannten Wert von n (aus Schwingungsbeobachtungen bei schwacher Dämpfung) immer zustande bringen kann, dass der entsprechende Wert von α sich genau einer dieser 12 Zahlen anpasst.

Ich habe in der Tabelle II für grössere Werte von α , von $\alpha=1,75$ ab, noch einige Werte der Funktion $F(\alpha, \psi)$, bei welchen der maximale Wert von α_m (siehe die vorige kleine Tabelle auf Seite 9) überschritten wird, wo also y' sein Vorzeichen schon geändert hat, hinzugefügt, aber dabei mich nur auf die Werte, die kleiner als die Einheit ausfallen, beschränkt.

Dieselben stehen in jeder Kolonne oberhalb des doppelten horizontalen Striches. Man könnte sich eventuell auch dieser Werte zur Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses bedienen, aber bei mechanischer Registrierungsart muss man dabei auf die Änderung des Vorzeichens des Korrektionsgliedes ρ für die Reibung des Schreibstiftes auf dem berussten Papier Acht geben¹⁾.

Ogleich die hier beschriebene Methode hauptsächlich für stark gedämpfte Pendel bestimmt ist²⁾, etwa für $v > 5$, also $\mu^2 < 0,80$, so habe ich doch der Vollständigkeit halber in der Tabelle II die Werte der Funktion $F(\alpha, \psi)$ noch für $\mu^2=0,90$ und $\mu^2=1,00$ (ungedämpftes Pendel) hinzugefügt. μ^2 ändert sich in dieser Tabelle von dem Wert $\mu^2=1,00$ bis zu $\mu^2=0,00$ (aperiodisches Pendel) um je 0,10. Hat man aus den Beobachtungen den Wert von $\frac{m_1}{m_2}$ bis auf 0,001 (man bedenke dabei, dass man nur mit den Differenzen der Ordinaten zu tun hat) genau ermittelt, so lässt sich der entsprechende Wert von μ^2 aus der Tabelle durch Interpolation finden.

Ein Blick auf die Differenzen der Funktion $F(\alpha, \psi)$ für benachbarte

¹⁾ Siehe meinen Aufsatz «Ueber ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges». Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. III. Livr. 3. St.-Petersbourg.

²⁾ Bei schwacher Dämpfung berechnet sich das Dämpfungsverhältnis viel besser aus der Abnahme der maximalen Amplituden.

Werte von μ^2 lässt sofort erkennen, dass bei sehr starker Dämpfung, also bei kleinen Werten von μ^2 , eine genaue Bestimmung von μ^2 etwas schwierig ist. Dies ist keine besondere Eigentümlichkeit dieser Methode, sondern es ist überhaupt schwierig, wenn die Dämpfung schon sehr stark geworden ist, μ^2 aus der Form der Kurve der Eigenbewegung des Pendels genau zu bestimmen. Bei einem passend gewählten α wird man für kleinere Werte von μ^2 diese Grösse doch bis auf 2 oder 3 Einheiten der zweiten Dezimale genau bestimmen können. (Siehe die Tabelle II). Dies ist aber für die Praxis als vollständig genügend anzusehen.

Es ist in der Tat freilich fast ganz gleichgültig, ob sich z. B. $\mu^2=0,34$ oder 0,31 ergeben würde. Denn im ersten Fall wird nach der Tabelle I $v=79,6$ und im zweiten $v=109$, aber ein Pendel, das so stark gedämpft ist, kann für die Praxis wohl schon als ein fast aperiodisches betrachtet werden.

Wollen wir nun ein Paar Worte betreffs der Auswahl von α hinzufügen.

Wollen wir dabei von den Werten der Funktion $F(\alpha, \psi)$ zwischen $\mu^2=1,00$ und $\mu^2=0,80$ absehen, da dieselben hier freilich nicht in Betracht kommen.

Die Werte der Differenzen der Funktion $F(\alpha, \psi)$ in der Tabelle II lassen sofort erkennen, dass der Fall $\alpha=0,25$ für die genaue Bestimmung von μ^2 ungünstig ist. Man wird also grössere Werte von α wählen müssen, aber in dieser Hinsicht muss man mit Vorsicht vorgehen, da die Tabelle uns zeigt, dass die in derselben Zeile sich befindlichen Werte der Differenzen mit wachsendem α nur am Anfang zunehmen; weiter nehmen sie schon ab, gehen durch Null hindurch, werden schliesslich negativ und weiter ihrer absoluten Grösse nach immer grösser. Es gibt also für jeden Wert von μ^2 einen bestimmten Wert von α , wo die Funktion $F(\alpha, \psi)$ mit der Änderung von μ^2 ihren Wert nicht mehr ändert.

Es sind also je nach dem Werte von μ^2 gewisse Werte von α von vornherein auszuschliessen, da bei denselben eine genaue Ermittlung von μ^2 überhaupt nicht möglich ist. Für kleinere Werte von μ^2 ist der Fall $\alpha=1,50$ überhaupt sehr ungünstig und sogar nicht brauchbar.

Der Fall $\alpha=2,00$, oder besser noch $\alpha > 2,00$ wird am zweckmässigsten sein.

Zweite Methode.

Diese erste hier beschriebene Methode zur Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses v oder des ihm entsprechenden Wertes von μ^2 besitzt den Vorteil, dass eine genaue Kenntnis der absoluten Werte der Ordinaten nicht erforderlich ist, da die Bestimmung von μ^2 sich nur auf der Differenz der Ordinaten basiert. Infolgedessen ist eine genaue Kenntnis der Lage der

Nulllinie nicht nötig. Da aber in einigen Fällen der Wert der Funktion $F(\alpha, \psi) = \frac{m_1}{m_2}$, wie die Tabelle II uns lehrt, sich recht wenig mit μ^2 ändert, so muss das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ recht genau ermittelt werden, was zuweilen, wenn die Beobachtungsbedingungen nicht sehr günstig sind (Bodenerschütterungen, Luftzüge), etwas umständlich sein kann.

Deshalb habe ich eine zweite Methode zur Bestimmung von μ^2 ausgearbeitet, die ziemlich bequem ist und rasch zum Ziele führt. Dieselbe setzt aber freilich die absoluten Werte der Ordinaten voraus; da dieselben aber nicht klein genommen zu werden brauchen, so wird ein etwaiger kleiner Fehler in der Lage der Nulllinie nicht mehr von Belang sein. Die weiter mitzuteilenden Versuche haben auch in der Tat gezeigt, dass diese zweite Methode zu ganz guten Resultaten führen kann.

Die Theorie derselben stützt sich auf dieselbe Grundformel (5); wir wollen aber in derselben andere Anfangsbedingungen einführen.

Es sei für $t = 0$ $y = 0$ und $y' = y'_0$ (Punkt 0 auf der Fig. 1).

Dann lässt sich y durch folgende Formel darstellen:

$$y = \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-\epsilon t} \sin \gamma t. \dots \dots \dots (25)$$

Das erste Maximum y_0 (Punkt A) entspricht einem Zeitmoment t_0 , wo

$$\text{tg } \gamma t_0 = \frac{\gamma}{\epsilon}. \dots \dots \dots (26)$$

wird.

Nun haben wir auf Grund der Beziehungen (6), (7) und (13)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= n \cos \psi \\ \gamma &= n \sin \psi \\ \mu &= \sin \psi, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

folglich wird

$$\frac{\gamma}{\epsilon} = \text{tg } \psi$$

und

$$\gamma t_0 = \psi.$$

Setzen wir nun weiter $\beta = \epsilon t_0$, so wird

$$\beta = \frac{\psi}{\text{tg } \psi} \dots \dots \dots (28)$$

Es ergibt sich also für die maximale Ordinate y_0 folgender Ausdruck:

$$y_0 = \frac{1}{n} \cdot y'_0 e^{-\beta} \dots \dots \dots (29)$$

Wollen wir nun einige andere Ordinaten y_1 , y_2 und y_3 messen, in einer Entfernung $2t_0$, $3t_0$ und $4t_0$ von dem Anfangspunkt der Koordinaten 0.

Dann wird nach Formel (25),

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-2\beta} \sin 2\psi = \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-2\beta} [2 \sin \psi \cos \psi] \\ y_2 &= \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-3\beta} \sin 3\psi = \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-3\beta} \sin \psi [3 - 4 \sin^2 \psi] \\ y_3 &= \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-4\beta} \sin 4\psi = \frac{1}{\gamma} y'_0 e^{-4\beta} [4 \sin \psi \cos \psi (1 - 2 \sin^2 \psi)] \end{aligned} \right\} \dots \dots (30)$$

Bezeichnen wir das Verhältnis dieser Ordinaten zu y_0 , resp. durch p_1 , p_2 und p_3 , also

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{y_1}{y_0}, \\ p_2 &= \frac{y_2}{y_0}, \\ p_3 &= \frac{y_3}{y_0}, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus den Beziehungen (29) und (30), mit Rücksicht auf die zweite der Formeln (27),

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{2 \cos \psi}{e^{\beta}} = f_1(\psi) \\ p_2 &= \frac{3 - 4 \sin^2 \psi}{e^{2\beta}} = f_2(\psi) \\ p_3 &= \frac{4 \cos \psi (1 - 2 \sin^2 \psi)}{e^{3\beta}} = f_3(\psi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

Jede von diesen drei Formeln kann, wenn das entsprechende p aus der Kurve bestimmt ist, zur Berechnung des Dämpfungsverhältnisses des Pendels dienen.

Jedem Wert von p_1 , p_2 oder p_3 entspricht ein bestimmter Wert von ψ . Hat man also ψ ermittelt, so erhält man sofort den gesuchten Wert von $\mu^2 = \sin^2 \psi$.

Zur Erleichterung dieser Rechnungen habe ich drei Tabellen für die Funktionen $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ und $f_3(\psi)$ berechnet, die weiter als Tabellen III,

IV und V gegeben sind. Als Argument für dieselben habe ich nicht ψ , sondern wieder μ^2 genommen, was praktischer ist, und zwar ändert sich dabei μ^2 von 1,00 (völlig ungedämpftes Pendel) bis $\mu^2 = 0,00$ (aperiodisches Pendel) um je 0,01. Diese Tabellen sind viel detaillierter in bezug auf μ^2 , als die Tabelle II. Mit Hilfe derselben kann man, wenn das Verhältnis der Ordinaten p bestimmt ist, das gesuchte μ^2 sofort ermitteln. Ein Wert von p genügt dazu vollkommen, die anderen können aber zur Kontrolle dienen.

Diese Tabellen zeigen, dass die Funktionen $f(\psi)$ sich im Allgemeinen viel rascher mit μ^2 ändern, als die Funktion $F(\alpha, \psi)$ der Tabelle II. Infolgedessen ist in dieser Hinsicht diese zweite Methode zur Bestimmung von μ^2 viel bequemer, als die erste. Am zweckmässigsten wird man dazu den Wert von p_1 wählen, da in diesem Fall ein etwaiger kleiner Fehler in der Lage der Nulllinie sich weniger geltend machen wird.

Wollen wir noch die Werte von p für beide Grenzfälle $\mu^2 = 1,00$ und $\mu^2 = 0$ hier zusammenstellen.

| | |
|------------------------|-------------------------------|
| $\mu^2 = 1,00$ | $\mu^2 = 0$ |
| $\psi = \frac{\pi}{2}$ | $\psi = 0$ |
| $\beta = 0$ | $\beta = 1$ |
| $p_1 = 0$ | $p_1 = \frac{2}{e} = 0,736$ |
| $p_2 = -1$ | $p_2 = \frac{3}{e^2} = 0,406$ |
| $p_3 = 0$ | $p_3 = \frac{4}{e^3} = 0,199$ |

Aus den Gleichungen (31) ergeben sich sofort die Grenzwerte für μ^2 , resp. v ,¹⁾ für welche die verschiedenen p noch positiv bleiben, wo also alle Ordinaten oberhalb der Zeitaxe liegen.

| | | |
|--------------|--------------------------|---------------|
| $p_1 \geq 0$ | $\mu^2 \leq 1$ | $v \geq 1$ |
| $p_2 \geq 0$ | $\mu^2 \leq \frac{3}{4}$ | $v \geq 6,13$ |
| $p_3 \geq 0$ | $\mu^2 \leq \frac{1}{2}$ | $v \geq 23,1$ |

Die hier beschriebenen Methoden zur Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses lassen sich nicht nur bei Horizontalpendeln anwenden, sondern an

¹⁾ Siehe die Tabelle I.

jedem Apparat, welcher eine bestimmte Schwingungsdauer besitzt (wie z. B. Federseismographen, Galvanometer etc.) und dessen Eigenbewegung der Grunddifferentialgleichung (2) entspricht. Diese Methoden sind speziell für sehr stark gedämpfte Apparate bestimmt, wo die sehr einfache Methode der Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses aus der Abnahme der maximalen Amplituden schon versagt, aber sie können auch für schwach gedämpfte Apparate gute Resultate ergeben.

Nach Ausarbeitung dieser beiden Methoden zur Bestimmung von μ^2 , resp. v , kam es mir darauf an, dieselben experimentell zu prüfen.

Für schwach gedämpfte Apparate ist das sehr leicht zustande zu bringen, da das wahre Dämpfungsverhältnis auf anderem Wege ermittelt werden kann; dann ist ein Vergleich der beiden Werte von μ^2 also leicht möglich. Für stark gedämpfte Apparate steht die Sache aber anders.

Deswegen habe ich für diese Kontrollversuche die Bewegung eines gedämpften Galvanometers vom Deprez - D'Arsonval'schen Typus, wie ich sie bei meinen seismometrischen Beobachtungen benutze, verwendet, da das entsprechende Dämpfungsverhältnis immer aus dem bekannten äusseren Widerstand des Stromkreises vorausberechnet werden kann.

Ich habe nämlich in meinem Aufsatz «Die elektromagnetische Registrier-methode»¹⁾ gezeigt, dass, wenn an dem entsprechenden Galvanometer nur ein System von Windungen verwendet wird, die Dämpfungskonstante ϵ des Galvanometers sich durch folgende Formel darstellen lässt:

$$\epsilon = c_0 + \frac{c}{R + \rho} \dots \dots \dots (32)$$

R ist der äussere Widerstand, ρ der Widerstand des Galvanometers, c_0 und c zwei Konstanten des Apparates, die sich aus Schwingungsbeobachtungen bei verhältnismässig schwacher Dämpfung (bei verschiedenen R) sehr leicht berechnen lassen.

Die andere Konstante n lässt sich aus der Eigenperiode T des Galvanometers bei sehr schwacher Dämpfung nach Formel (3) bestimmen.

Somit erhält man sofort den entsprechenden Wert von

$$\mu^2 = 1 - \left(\frac{\epsilon}{n}\right)^2 \dots \dots \dots (33)$$

Durch passende Auswahl von R kann man jeden vorgeschriebenen Wert

¹⁾ Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente T. III. Livr. 1. § 2.

von μ^2 herstellen. Speziell für die Grenze der Aperiodizität wird

$$R_a = \frac{c}{n - c_0} - \rho \dots \dots \dots (34)$$

sein.

Die Konstanten des Galvanometers waren die folgenden:

$$c_0 = 0,00556$$

$$c_1 = 6,310$$

$$\rho = 4,12 \Omega$$

$$T = 24,699 \text{ Sec.}$$

Daraus ergibt sich

$$n = \frac{2\pi}{T} = 0,25439$$

und für die Grenze der Aperiodizität

$$R_a = 21,2 \Omega.$$

Es wurden mit diesem Galvanometer zwei Versuchsreihen angestellt bei 4 verschiedenen Werten des äusseren Widerstandes R . Für jedes R konnte man den entsprechenden Wert von μ^2 nach den Formeln (32) und (33) vorausberechnen. Die anfängliche Geschwindigkeit der beweglichen Spule des Galvanometers wurde durch einen fast momentanen Stromstoss erteilt.

Auf diese Weise wurde bei jedem R eine Anzahl Kurven der Eigenbewegung des Galvanometers aufgenommen und zwar auf rein optischem Wege auf lichtempfindlichen Papier.

Auf diesen Kurven wurde alsdann eine Anzahl Ordinaten ausgemessen, entsprechend der ersten oder zweiten Methode zur Bestimmung von μ^2 . Man benutzte dazu einen Wanschaff'schen Koordinatenmesser.

Bei der Bestimmung von μ^2 nach der ersten Methode wurden zwei Werte von α ausgewählt, nämlich $\alpha = 0,75$ und $\alpha = 2,00$. Da n für das Galvanometer gleich 0,25439 war, so ergaben sich nach der Formel (16) für die Entfernung τ zweier benachbarter aequidistanter Ordinaten $\tau = 2,948 \text{ Sec.}$, resp. $\tau = 7,862 \text{ Sec.}$

Bei der Bestimmung von μ^2 nach der zweiten Methode wurden immer die drei Werte von p , nämlich p_1 , p_2 und p_3 aus der Kurve entnommen und für jedes einzelnes p der entsprechende Wert von μ^2 ermittelt.

Es wurde ausserdem, wenn die Stärke der Dämpfung es gestattete, eine Anzahl Maximalordinaten ausgemessen und aus ihnen das Dämpfungs-

verhältnis v direkt abgeleitet. Zur Kontrolle wurde auch dazu die direkte visuelle Methode mittelst Fernrohrs und Skala verwendet.

Zur Berechnung von v benutzte ich nicht die einfache Formel (1), sondern die Formel

$$v = \frac{y_k + y_{k+1}}{y_{k+1} + y_{k+2}}, \dots \dots \dots (35)$$

um einen etwaigen Fehler in der Lage der Nulllinie zu eliminieren.

Aus dem so erhaltenen Wert von v wurde alsdann nach den Formeln (8) und (7) der entsprechende Wert von μ^2 berechnet.

Ich gebe eben in dieser Zusammenstellung der Resultate nicht die etwaigen Werte des Dämpfungsverhältnisses v , sondern die ihnen entsprechenden Werte von μ^2 , da eben diese Grösse für die Theorie der Bewegung eines Horizontalpendels unter dem Einfluss periodischer Bebenwellen besonders maassgebend ist und die Wirkung der Dämpfung speziell charakterisiert. Man vergleiche Formel (21) meiner Abhandlung «Seismometrische Beobachtungen in Pulkowa. Zweite Mitteilung» (l. c. § 2).

I Versuchsreihe.

Fall A.

$$R = 84,40 \Omega \quad \mu^2 = 0,91$$

$$\text{Aus der Abnahme der Maximalamplituden} \quad \mu^2 = 0,91$$

$$\text{Mittelst Fernrohrs und Skala} \quad \mu^2 = 0,91$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 0,75 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,321 \quad \mu^2 = 0,92^1$$

(2 Bestimmungen)

Fall B.

$$R = 44,40 \Omega \quad \mu^2 = 0,72$$

$$\text{Aus der Abnahme der Maximalamplituden} \quad \mu^2 = 0,72$$

$$\text{Mittelst Fernrohrs und Skala} \quad \mu^2 = 0,72$$

¹⁾ Durch graphische Interpolation erhalten.

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 0,75 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,346 \quad \mu^2 = 0,77$$

(6 Bestimmungen)

Diese letzte Bestimmung ist nicht besonders sicher, da die einzelnen Werte von $\frac{m_1}{m_2}$ erheblich von einander abwiechen.

Fall C.

$$R = 28,40 \, \Omega \quad \mu^2 = 0,38$$

$$\begin{array}{ll} \text{Aus der Abnahme der Maximalamplituden} & \mu^2 = 0,39 \\ \text{Mittelst Fernrohrs und Skala} & \mu^2 = 0,39 \end{array}$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 0,75 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,373 \quad \mu^2 = 0,42$$

(8 Bestimmungen)

$$\alpha = 2,00 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,684 \quad \mu^2 = 0,40$$

(8 Bestimmungen)

Fall D.

Grenze der Aperiodizität.

$$R = 21,22 \, \Omega \quad \mu^2 = 0,00$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 0,75 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,393 \quad \mu^2 = \text{etwa } 0,0$$

(6 Bestimmungen)

$$\alpha = 2,00 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,654 \quad \mu^2 = 0,00$$

(6 Bestimmungen)

II Versuchsreihe.

Fall A.

$$R = 77,22 \, \Omega \quad \mu^2 = 0,89$$

$$\begin{array}{ll} \text{Aus der Abnahme der Maximalamplituden} & \mu^2 = 0,89 \\ \text{Mittelst Fernrohrs und Skala} & \mu^2 = 0,89 \end{array}$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 2,00 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,778 \quad \mu^2 = 0,89^1$$

(5 Bestimmungen)

Nach der zweiten Methode.

Im Mittel
aus je 5 einzelnen Bestimmungen

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 = 0,428 & \mu^2 = 0,89 \\ p_2 = -0,248 & \mu^2 = 0,89 \\ p_3 = -0,280 & \mu^2 = 0,89 \end{array} \right\} \text{Im Mittel } \mu^2 = 0,89$$

Fall B.

$$R = 40,22 \, \Omega \quad \mu^2 = 0,66$$

$$\begin{array}{ll} \text{Aus der Abnahme der Maximalamplituden} & \mu^2 = 0,66 \\ \text{Mittelst Fernrohrs und Skala} & \mu^2 = 0,66 \end{array}$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 2,00 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,720 \quad \mu^2 = 0,66$$

(5 Bestimmungen)

Nach der zweiten Methode.

Im Mittel
aus je 5 einzelnen Bestimmungen

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 = 0,596 & \mu^2 = 0,65 \\ p_2 = 0,099 & \mu^2 = 0,65 \\ p_3 = -0,095 & \mu^2 = 0,66 \end{array} \right\} \text{Im Mittel } \mu^2 = 0,65$$

¹⁾ Durch graphische Interpolation erhalten.

Fall C.

$$R = 29,22 \quad \mu^2 = 0,11$$

$$\text{Mittelst Fernrohrs und Skala} \quad \mu^2 = 0,41$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 2,00 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,687 \quad \mu^2 = 0,43$$

(5 Bestimmungen)

Nach der zweiten Methode.

Im Mittel
aus je 5 einzelnen Bestimmungen

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 = 0,669 & \mu^2 = 0,40 \\ p_2 = 0,246 & \mu^2 = 0,43 \\ p_3 = 0,037 & \mu^2 = 0,43 \end{array} \right\} \text{Im Mittel } \mu^2 = 0,42$$

Fall D.

Grenze der Aperiodizität.

$$R = 21,22 \quad \mu^2 = 0,00$$

Nach der ersten Methode.

$$\alpha = 2,00 \quad \text{Im Mittel } \frac{m_1}{m_2} = 0,6546 \quad \mu^2 = 0,01$$

(5 Bestimmungen)

Nach der zweiten Methode.

Im Mittel
aus je 5 einzelnen Bestimmungen

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 = 0,733 & \mu^2 = 0,02 \\ p_2 = 0,404 & \mu^2 = 0,01 \\ p_3 = 0,198 & \mu^2 = 0,00 \end{array} \right\} \text{Im Mittel } \mu^2 = 0,01$$

Aus einer näheren Betrachtung des hier zusammengestellten Beobachtungsmaterials geht unmittelbar hervor, dass die beiden hier beschriebenen

Methoden zur Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses verschiedener Seismographen ganz zweckentsprechend sind. Die einzelnen Werte von μ^2 stimmen im Allgemeinen ganz befriedigend überein. Nur im Falle B für die erste Versuchsreihe hat sich μ^2 nach der ersten Methode um 5 Einheiten der zweiten Decimale grösser ergeben. Aber in diesem Falle, wie schon früher bemerkt wurde, wiesen die einzelnen Werte des Verhältnisses $\frac{m_1}{m_2}$ ziemlich grosse Schwankungen auf. Ausserdem war der gewählte Wert von $\alpha = 0,75$ ein ziemlich ungünstiger. Man wird in der Praxis $\alpha = 2,00$ oder noch grösser wählen müssen; dann wird man ohne Zweifel bessere Resultate bekommen.

Die zweite Methode scheint etwas bequemer zu sein. Ausserdem liefert dieselbe, wenn p_1 , p_2 und p_3 bestimmt sind, drei getrennte Werte für μ^2 , aus welchen man alsdann das Mittel bilden kann.

Speziell für grössere Werte des Dämpfungsverhältnisses, also für kleinere Werte von μ^2 , etwa $\mu^2 < 40$ (also $v > 46,9$), wo die direkte Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses aus der Abnahme der Maximalamplituden fast völlig versagt, können diese beiden neuen Methoden ganz gute Dienste leisten, da ihre praktische Anwendbarkeit durch die hier beschriebenen Versuche als genügend bewiesen betrachtet werden darf.

Tabelle I.

| μ^2 | h | v | μ^2 | h | v |
|---------|-------|------|---------|-------|----------------------|
| 1,00 | 0,000 | 1,00 | 0,50 | 0,707 | 23.1 ¹⁾ |
| 0,99 | 0,100 | 1,37 | 0,49 | 0,714 | 24.7 |
| 0,98 | 0,141 | 1,57 | 0,48 | 0,721 | 26.3 |
| 0,97 | 0,173 | 1,74 | 0,47 | 0,728 | 28.1 |
| 0,96 | 0,200 | 1,90 | 0,46 | 0,735 | 30.1 |
| 0,95 | 0,224 | 2,06 | 0,45 | 0,742 | 32.2 |
| 0,94 | 0,245 | 2,21 | 0,44 | 0,748 | 34.6 |
| 0,93 | 0,265 | 2,37 | 0,43 | 0,755 | 37.2 |
| 0,92 | 0,283 | 2,53 | 0,42 | 0,762 | 40.1 |
| 0,91 | 0,300 | 2,69 | 0,41 | 0,768 | 43.3 |
| 0,90 | 0,316 | 2,85 | 0,40 | 0,775 | 46.9 |
| 0,89 | 0,332 | 3,02 | 0,39 | 0,781 | 50.9 |
| 0,88 | 0,346 | 3,19 | 0,38 | 0,787 | 55.3 |
| 0,87 | 0,361 | 3,37 | 0,37 | 0,794 | 60.3 |
| 0,86 | 0,374 | 3,55 | 0,36 | 0,800 | 65.9 |
| 0,85 | 0,387 | 3,74 | 0,35 | 0,806 | 72.3 |
| 0,84 | 0,400 | 3,94 | 0,34 | 0,812 | 79.6 |
| 0,83 | 0,412 | 4,14 | 0,33 | 0,819 | 87.9 |
| 0,82 | 0,424 | 4,36 | 0,32 | 0,825 | 97.5 |
| 0,81 | 0,436 | 4,58 | 0,31 | 0,831 | 109 |
| 0,80 | 0,447 | 4,81 | 0,30 | 0,837 | 121 |
| 0,79 | 0,458 | 5,05 | 0,29 | 0,843 | 136 |
| 0,78 | 0,469 | 5,30 | 0,28 | 0,849 | 154 |
| 0,77 | 0,480 | 5,57 | 0,27 | 0,854 | 175 |
| 0,76 | 0,490 | 5,84 | 0,26 | 0,860 | 200 |
| 0,75 | 0,500 | 6,13 | 0,25 | 0,866 | 231 |
| 0,74 | 0,510 | 6,44 | 0,24 | 0,872 | 268 |
| 0,73 | 0,520 | 6,76 | 0,23 | 0,877 | 314 |
| 0,72 | 0,529 | 7,09 | 0,22 | 0,883 | 371 |
| 0,71 | 0,539 | 7,45 | 0,21 | 0,889 | 443 |
| 0,70 | 0,548 | 7,82 | 0,20 | 0,894 | 536 |
| 0,69 | 0,557 | 8,21 | 0,19 | 0,900 | 656 |
| 0,68 | 0,566 | 8,63 | 0,18 | 0,906 | 817 |
| 0,67 | 0,574 | 9,07 | 0,17 | 0,911 | 103×10^1 |
| 0,66 | 0,583 | 9,53 | 0,16 | 0,917 | 134×10^1 |
| 0,65 | 0,592 | 10,0 | 0,15 | 0,922 | 177×10^1 |
| 0,64 | 0,600 | 10,6 | 0,14 | 0,927 | 241×10^1 |
| 0,63 | 0,608 | 11,1 | 0,13 | 0,933 | 339×10^1 |
| 0,62 | 0,616 | 11,7 | 0,12 | 0,938 | 495×10^1 |
| 0,61 | 0,624 | 12,3 | 0,11 | 0,943 | 760×10^1 |
| 0,60 | 0,632 | 13,0 | 0,10 | 0,949 | 124×10^2 |
| 0,59 | 0,640 | 13,7 | 0,09 | 0,954 | 218×10^2 |
| 0,58 | 0,648 | 14,5 | 0,08 | 0,959 | 424×10^2 |
| 0,57 | 0,656 | 15,3 | 0,07 | 0,964 | 940×10^2 |
| 0,56 | 0,663 | 16,2 | 0,06 | 0,970 | 251×10^3 |
| 0,55 | 0,671 | 17,1 | 0,05 | 0,975 | 886×10^3 |
| 0,54 | 0,678 | 18,2 | 0,04 | 0,980 | 483×10^4 |
| 0,53 | 0,686 | 19,3 | 0,03 | 0,985 | 573×10^5 |
| 0,52 | 0,693 | 20,5 | 0,02 | 0,990 | 355×10^7 |
| 0,51 | 0,700 | 21,7 | 0,01 | 0,995 | 377×10^{11} |
| | | | 0 | 1,000 | ∞ |

1) Kritischer Wert von v .

Tabelle II.

Werte der Funktion $\frac{m_1}{m_2} = F(\alpha, \psi)$.

$\mu^2 = \sin^2 \psi$.

| $\alpha \rightarrow$ μ^2 | 0,25 | Diff. | 0,50 | Diff. | 0,75 | Diff. | 1,00 | Diff. | 1,25 | Diff. | 1,50 | Diff. | 1,75 | Diff. | 2,00 | Diff. | 2,25 | Diff. | 2,50 | Diff. | 2,75 | Diff. | 3,00 | Diff. |
|---------------------------------|-------|-------------|-------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|-------|----------------|-------|----------------|-------|----------------|-------|-----------------|-------|----------------|-------|----------------|
| \downarrow | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1,00 | 0,254 | +0,013 6 | 0,266 | +0,027 10 | 0,289 | +0,039 15 | 0,325 | +0,052 17 | 0,380 | +0,062 17 | 0,467 | +0,061 12 | 0,608 | +0,032 — 34 | 0,856 | —0,073 — 34 | — | —0,084 — 48 | — | — 0,077 — 50 | — | —0,045 — 33 | — | —0,052 — 37 |
| 0,90 | 0,267 | | 0,293 | | 0,328 | | 0,377 | | 0,442 | | 0,528 | | 0,640 | | 0,783 | | 0,956 | | — | | — | | — | |
| 0,80 | 0,273 | | 0,303 | | 0,343 | | 0,394 | | 0,459 | | 0,540 | | 0,637 | | 0,749 | | 0,872 | | 0,996 | | — | | — | |
| 0,70 | 0,276 | 8 | 0,310 | 7 | 0,353 | 10 | 0,406 | 12 | 0,470 | 11 | 0,545 | 5 | 0,632 | — 5 | 0,726 | — 23 | 0,824 | — 48 | 0,919 | — 0,077 | — | — | — | — |
| 0,60 | 0,280 | 4 | 0,317 | 7 | 0,361 | 8 | 0,415 | 9 | 0,478 | 8 | 0,549 | 4 | 0,627 | — 5 | 0,709 | — 17 | 0,791 | — 33 | 0,869 | — 50 | 0,938 | — | 0,994 | — |
| 0,50 | 0,283 | 3 | 0,322 | 5 | 0,368 | 7 | 0,422 | 7 | 0,483 | 5 | 0,551 | 2 | 0,622 | — 5 | 0,696 | — 13 | 0,767 | — 24 | 0,834 | — 35 | 0,893 | —0,045 | 0,942 | —0,052 |
| 0,40 | 0,285 | 2 | 0,327 | 5 | 0,374 | 6 | 0,428 | 6 | 0,488 | 5 | 0,552 | 1 | 0,618 | — 4 | 0,684 | — 12 | 0,748 | — 19 | 0,808 | — 26 | 0,860 | — 33 | 0,905 | — 37 |
| 0,30 | 0,287 | 2 | 0,331 | 4 | 0,379 | 5 | 0,433 | 5 | 0,491 | 3 | 0,552 | 0 | 0,614 | — 4 | 0,675 | — 9 | 0,733 | — 15 | 0,787 | — 21 | 0,834 | — 26 | 0,875 | — 30 |
| 0,20 | 0,290 | 3 | 0,335 | 4 | 0,384 | 5 | 0,438 | 5 | 0,494 | 3 | 0,552 | 0 | 0,610 | — 4 | 0,667 | — 8 | 0,720 | — 13 | 0,769 | — 18 | 0,813 | — 21 | 0,851 | — 24 |
| 0,10 | 0,291 | 1 | 0,338 | 3 | 0,388 | 4 | 0,441 | 3 | 0,497 | 3 | 0,552 | 0 | 0,607 | — 3 | 0,660 | — 7 | 0,710 | — 10 | 0,755 | — 14 | 0,796 | — 17 | 0,832 | — 19 |
| 0,00 | 0,294 | 3 | 0,341 | 3 | 0,392 | 4 | 0,445 | 4 | 0,499 | 2 | 0,552 | 0 | 0,604 | — 3 | 0,654 | — 6 | 0,700 | — 10 | 0,743 | — 12 | 0,781 | — 15 | 0,815 | — 17 |

Tabelle III.

$$p_1 = f_1(\psi) = \frac{2 \cos \psi}{e^\beta}.$$

$$\mu^2 = \sin^2 \psi. \quad \beta = \frac{\psi}{\tan \psi}.$$

| μ^2 | p_1 | Δ | μ^2 | p_1 | Δ | μ^2 | p_1 | Δ | μ^2 | p_1 | Δ |
|---------|-------|----------|---------|-------|----------|---------|-------|----------|---------|-------|----------|
| 1,00 | 0,000 | +0,172 | 0,75 | 0,546 | +0,006 | 0,50 | 0,645 | +0,008 | 0,25 | 0,699 | +0,002 |
| 0,99 | 0,172 | | 0,74 | 0,552 | | 0,49 | 0,648 | | 0,24 | 0,701 | |
| 0,98 | 0,231 | | 0,73 | 0,557 | | 0,48 | 0,650 | | 0,23 | 0,703 | |
| 0,97 | 0,271 | 59 | 0,72 | 0,563 | 5 | 0,47 | 0,653 | 2 | 0,22 | 0,704 | 2 |
| 0,96 | 0,302 | 40 | 0,71 | 0,568 | 6 | 0,46 | 0,655 | 3 | 0,21 | 0,706 | 1 |
| 0,95 | 0,328 | 31 | 0,70 | 0,573 | 5 | 0,45 | 0,658 | 2 | 0,20 | 0,708 | 2 |
| 0,94 | 0,351 | 26 | 0,69 | 0,577 | 5 | 0,44 | 0,660 | 3 | 0,19 | 0,709 | 2 |
| 0,93 | 0,370 | 23 | 0,68 | 0,582 | 4 | 0,43 | 0,663 | 2 | 0,18 | 0,711 | 1 |
| 0,92 | 0,387 | 19 | 0,67 | 0,586 | 5 | 0,42 | 0,665 | 3 | 0,17 | 0,712 | 2 |
| 0,91 | 0,403 | 17 | 0,66 | 0,590 | 4 | 0,41 | 0,667 | 2 | 0,16 | 0,714 | 1 |
| 0,90 | 0,417 | 16 | 0,65 | 0,595 | 4 | 0,40 | 0,670 | 3 | 0,15 | 0,715 | 2 |
| 0,89 | 0,430 | 14 | 0,64 | 0,599 | 5 | 0,39 | 0,672 | 2 | 0,14 | 0,717 | 1 |
| 0,88 | 0,442 | 13 | 0,63 | 0,603 | 4 | 0,38 | 0,674 | 2 | 0,13 | 0,718 | 2 |
| 0,87 | 0,453 | 12 | 0,62 | 0,606 | 3 | 0,37 | 0,676 | 2 | 0,12 | 0,720 | 1 |
| 0,86 | 0,463 | 11 | 0,61 | 0,610 | 4 | 0,36 | 0,678 | 2 | 0,11 | 0,721 | 2 |
| 0,85 | 0,473 | 10 | 0,60 | 0,614 | 4 | 0,35 | 0,680 | 2 | 0,10 | 0,723 | 1 |
| 0,84 | 0,482 | 10 | 0,59 | 0,617 | 3 | 0,34 | 0,683 | 3 | 0,09 | 0,724 | 1 |
| 0,83 | 0,491 | 9 | 0,58 | 0,620 | 3 | 0,33 | 0,685 | 2 | 0,08 | 0,725 | 2 |
| 0,82 | 0,499 | 9 | 0,57 | 0,624 | 4 | 0,32 | 0,686 | 1 | 0,07 | 0,727 | 1 |
| 0,81 | 0,507 | 8 | 0,56 | 0,627 | 3 | 0,31 | 0,688 | 2 | 0,06 | 0,728 | 1 |
| 0,80 | 0,514 | 8 | 0,55 | 0,630 | 3 | 0,30 | 0,690 | 2 | 0,05 | 0,729 | 2 |
| 0,79 | 0,521 | 7 | 0,54 | 0,633 | 3 | 0,29 | 0,692 | 2 | 0,04 | 0,731 | 1 |
| 0,78 | 0,528 | 7 | 0,53 | 0,636 | 3 | 0,28 | 0,694 | 2 | 0,03 | 0,732 | 1 |
| 0,77 | 0,534 | 6 | 0,52 | 0,639 | 3 | 0,27 | 0,696 | 2 | 0,02 | 0,733 | 2 |
| 0,76 | 0,540 | 6 | 0,51 | 0,642 | 3 | 0,26 | 0,698 | 2 | 0,01 | 0,735 | 1 |
| | | 6 | | | 3 | | | 1 | 0,00 | 0,736 | |

Tabelle IV.

$$p_2 = f_2(\psi) = \frac{3 - 4 \sin^2 \psi}{\mu^2 \beta}.$$

$$\mu^2 = \sin^2 \psi. \quad \beta = \frac{\psi}{\text{tang } \psi}.$$

| μ^2 | p_2 | Δ | μ^2 | p_2 | Δ | μ^2 | p_2 | Δ | μ^2 | p_2 | Δ |
|---------|--------|--|---------|--------|--|---------|--------|--|---------|--------|---|
| 1,00 | —1,000 | +0,285 103 73 59 48 43 37 33 30 28 | 0,75 | 0,000 | +0,012 11 11 10 11 9 10 9 9 9 | 0,50 | +0,208 | +0,006 6 5 6 5 5 6 5 5 4 5 5 4 4 5 4 4 5 4 4 4 | 0,25 | +0,326 | +0,004 4 3 4 3 4 3 4 3 4 3 3 4 3 3 3 3 3 3 3 2 3 |
| 0,99 | —0,715 | | 0,74 | +0,012 | | 0,49 | +0,214 | | 0,24 | +0,330 | |
| 0,98 | —0,612 | | 0,73 | +0,023 | | 0,48 | +0,220 | | 0,23 | +0,334 | |
| 0,97 | —0,539 | | 0,72 | +0,034 | | 0,47 | +0,225 | | 0,22 | +0,337 | |
| 0,96 | —0,480 | | 0,71 | +0,044 | | 0,46 | +0,231 | | 0,21 | +0,341 | |
| 0,95 | —0,432 | | 0,70 | +0,055 | | 0,45 | +0,236 | | 0,20 | +0,344 | |
| 0,94 | —0,389 | | 0,69 | +0,064 | | 0,44 | +0,241 | | 0,19 | +0,348 | |
| 0,93 | —0,352 | | 0,68 | +0,074 | | 0,43 | +0,247 | | 0,18 | +0,351 | |
| 0,92 | —0,319 | | 0,67 | +0,083 | | 0,42 | +0,252 | | 0,17 | +0,355 | |
| 0,91 | —0,289 | | 0,66 | +0,092 | | 0,41 | +0,257 | | 0,16 | +0,358 | |
| 0,90 | —0,261 | 26 23 22 21 20 18 18 16 16 15 14 14 13 13 12 | 0,65 | +0,101 | 9 9 8 8 8 7 8 7 7 6 7 6 6 6 6 6 4 4 | 0,40 | +0,262 | 5 4 5 5 5 4 4 5 4 4 4 4 4 4 4 4 4 | 0,15 | +0,361 | 3 4 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 |
| 0,89 | —0,235 | | 0,64 | +0,110 | | 0,39 | +0,266 | | 0,14 | +0,365 | |
| 0,88 | —0,212 | | 0,63 | +0,118 | | 0,38 | +0,271 | | 0,13 | +0,368 | |
| 0,87 | —0,190 | | 0,62 | +0,126 | | 0,37 | +0,276 | | 0,12 | +0,371 | |
| 0,86 | —0,169 | | 0,61 | +0,134 | | 0,36 | +0,281 | | 0,11 | +0,374 | |
| 0,85 | —0,149 | | 0,60 | +0,141 | | 0,35 | +0,285 | | 0,10 | +0,377 | |
| 0,84 | —0,131 | | 0,59 | +0,149 | | 0,34 | +0,289 | | 0,09 | +0,380 | |
| 0,83 | —0,113 | | 0,58 | +0,156 | | 0,33 | +0,294 | | 0,08 | +0,383 | |
| 0,82 | —0,097 | | 0,57 | +0,163 | | 0,32 | +0,298 | | 0,07 | +0,386 | |
| 0,81 | —0,081 | | 0,56 | +0,170 | | 0,31 | +0,302 | | 0,06 | +0,389 | |
| 0,80 | —0,066 | 14 14 13 13 12 | 0,55 | +0,176 | 7 6 7 6 7 6 6 6 6 6 | 0,30 | +0,306 | 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 | 0,05 | +0,392 | 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 |
| 0,79 | —0,052 | | 0,54 | +0,183 | | 0,29 | +0,310 | | 0,04 | +0,395 | |
| 0,78 | —0,038 | | 0,53 | +0,189 | | 0,28 | +0,314 | | 0,03 | +0,398 | |
| 0,77 | —0,025 | | 0,52 | +0,196 | | 0,27 | +0,318 | | 0,02 | +0,401 | |
| 0,76 | —0,012 | | 0,51 | +0,202 | | 0,26 | +0,322 | | 0,01 | +0,403 | |
| | | | | | | | | | 0,00 | +0,406 | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

Tabelle V.

$$p_3 = f_3(\psi) = \frac{4 \cos \psi \{1 - 2 \sin^2 \psi\}}{e^{3\beta}}.$$

$$\mu^2 = \sin^2 \psi. \quad \beta = \frac{\psi}{\tan \psi}.$$

| μ^2 | p_3 | Δ | μ^2 | p_3 | Δ | μ^2 | p_3 | Δ | μ^2 | p_3 | Δ |
|---------|--------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|----------|---------|--------|----------|
| 1,00 | 0,000 | -0,252 | 0,75 | -0,163 | +0,008 | 0,50 | 0,000 | +0,005 | 0,25 | +0,114 | +0,004 |
| 0,99 | -0,252 | -42 | 0,74 | -0,155 | +7 | 0,49 | +0,005 | +6 | 0,24 | +0,118 | +4 |
| 0,98 | -0,294 | -18 | 0,73 | -0,148 | +8 | 0,48 | +0,011 | +5 | 0,23 | +0,122 | +3 |
| 0,97 | -0,312 | -6 | 0,72 | -0,140 | +8 | 0,47 | +0,016 | +5 | 0,22 | +0,125 | +4 |
| 0,96 | -0,318 | -1 | 0,71 | -0,132 | +7 | 0,46 | +0,021 | +5 | 0,21 | +0,129 | +4 |
| 0,95 | -0,319 | +3 | 0,70 | -0,125 | +7 | 0,45 | +0,026 | +5 | 0,20 | +0,133 | +4 |
| 0,94 | -0,316 | +5 | 0,69 | -0,118 | +7 | 0,44 | +0,031 | +5 | 0,19 | +0,137 | +3 |
| 0,93 | -0,311 | +6 | 0,68 | -0,111 | +7 | 0,43 | +0,036 | +5 | 0,18 | +0,140 | +4 |
| 0,92 | -0,305 | +7 | 0,67 | -0,104 | +7 | 0,42 | +0,041 | +4 | 0,17 | +0,144 | +3 |
| 0,91 | -0,298 | +8 | 0,66 | -0,097 | +7 | 0,41 | +0,045 | +5 | 0,16 | +0,147 | +4 |
| 0,90 | -0,290 | +8 | 0,65 | -0,090 | +7 | 0,40 | +0,050 | +5 | 0,15 | +0,151 | +3 |
| 0,89 | -0,282 | +8 | 0,64 | -0,083 | +6 | 0,39 | +0,055 | +4 | 0,14 | +0,154 | +4 |
| 0,88 | -0,274 | +9 | 0,63 | -0,077 | +7 | 0,38 | +0,059 | +5 | 0,13 | +0,158 | +3 |
| 0,87 | -0,265 | +9 | 0,62 | -0,070 | +6 | 0,37 | +0,064 | +4 | 0,12 | +0,161 | +3 |
| 0,86 | -0,256 | +9 | 0,61 | -0,064 | +6 | 0,36 | +0,068 | +5 | 0,11 | +0,164 | +4 |
| 0,85 | -0,247 | +8 | 0,60 | -0,058 | +6 | 0,35 | +0,073 | +4 | 0,10 | +0,168 | +3 |
| 0,84 | -0,239 | +9 | 0,59 | -0,052 | +6 | 0,34 | +0,077 | +4 | 0,09 | +0,171 | +3 |
| 0,83 | -0,230 | +9 | 0,58 | -0,046 | +6 | 0,33 | +0,081 | +5 | 0,08 | +0,174 | +4 |
| 0,82 | -0,221 | +9 | 0,57 | -0,040 | +6 | 0,32 | +0,086 | +4 | 0,07 | +0,178 | +3 |
| 0,81 | -0,212 | +8 | 0,56 | -0,034 | +6 | 0,31 | +0,090 | +4 | 0,06 | +0,181 | +3 |
| 0,80 | -0,204 | +8 | 0,55 | -0,028 | +6 | 0,30 | +0,094 | +4 | 0,05 | +0,184 | +3 |
| 0,79 | -0,196 | +9 | 0,54 | -0,022 | +6 | 0,29 | +0,098 | +4 | 0,04 | +0,187 | +3 |
| 0,78 | -0,187 | +8 | 0,53 | -0,016 | +5 | 0,28 | +0,102 | +4 | 0,03 | +0,190 | +3 |
| 0,77 | -0,179 | +8 | 0,52 | -0,011 | +6 | 0,27 | +0,106 | +4 | 0,02 | +0,193 | +3 |
| 0,76 | -0,171 | +8 | 0,51 | -0,005 | +5 | 0,26 | +0,110 | +4 | 0,01 | +0,196 | +3 |
| | | | | | | | | | 0,00 | +0,199 | +3 |